PROBLEMA 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \qquad \text{e} \qquad g(x) = sen\,\frac{\pi}{2}x$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.

2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R.

3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).

4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

Soluzione

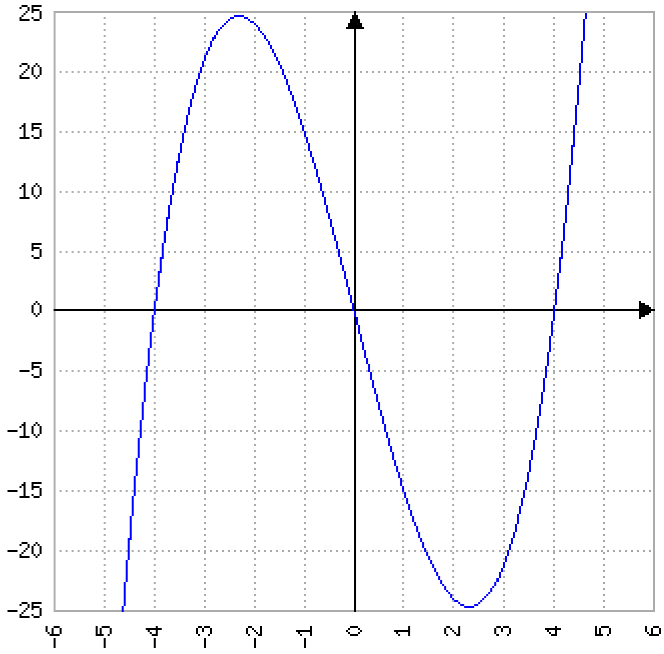
1) Studiamo la funzione $f(x) = x^3 - 16x$:

   a. Dominio:R
   b. Intersezione ascisse: $x = -4,0,4$
   c. Intersezioni ordinate:(0,0);
   d. Simmetrie: la funzione è dispari;
   e. Positività: $f(x) = x^3 - 16x > 0 \rightarrow -4 < x < 0 \vee x > 4$
   f. Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è R
   g. Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ per cui non ve ne sono;
   h. Asintoti obliqui: non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
   i. Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x) = 3x^2 - 16$ per cui è strettamente crescente in $\left(-\infty, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ e strettamente decrescente in

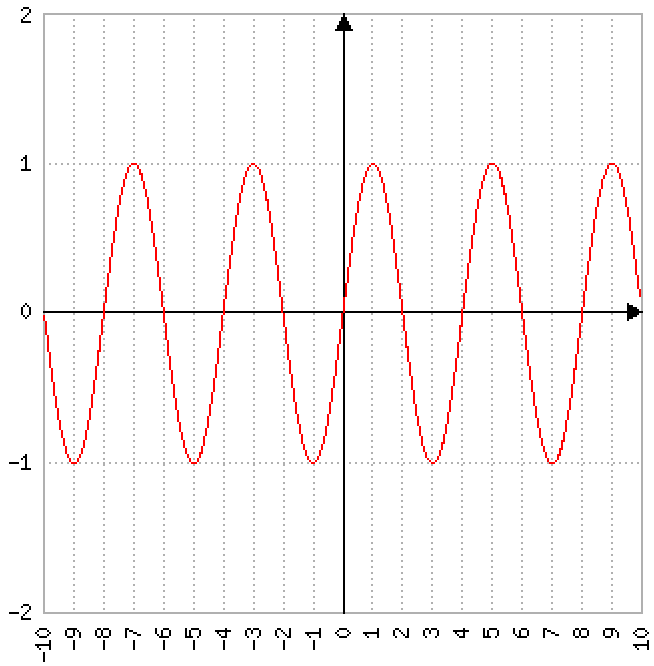
$\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ per cui $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$ è un massimo e $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},-\frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$ è un minimo;

j. Concavità e convessità: $f''(x)=6x$ per cui $(0,0)$ è un flesso a tangente obliqua.

Il grafico è di seguito presentato:

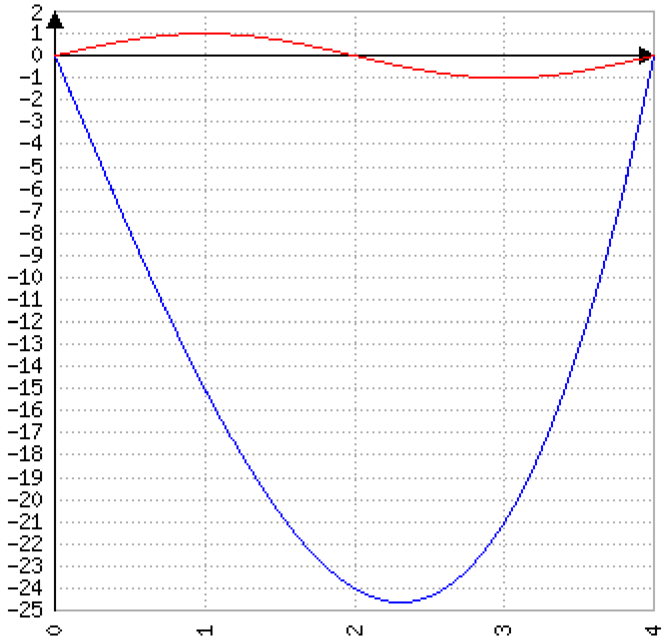


La funzione $g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è una classica funzione sinusoidale di periodo T=4 che interseca l'asse delle ascisse nei punti $x=2k$ con $k\in Z$ e il grafico è il seguente:



I punti di g a tangente orizzontale sono i punti in cui si annulla la derivata prima $g'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e cioè $g'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0 \rightarrow \frac{\cancel{\pi}}{2}x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\cancel{\pi} \rightarrow x=2k+1$ con $k \in Z$ e nell'intervallo [-10,10] i punti sono $(-9,-1),(-7,1),(-5,-1),(-3,1),(-1,-1),(1,1),(3,-1),(5,1),(7,-1),(9,1)$

2) La regione R è di seguito presentata:



Il grafico della funzione g in [0,4] sta sempre al di sopra di quello di f per cui l'area richiesta vale

$$S(R)==\int_0^4[g(x)-f(x)]dx=\int_0^4\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-x^3+16x\right]dx=\left[-\frac{2\cos(\pi x)}{\pi}-\frac{x^4}{4}+8x^2\right]_0^4=$$

$$=\left(-\frac{2}{\pi}-64+128\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\right)=64$$

3) Dobbiamo risolvere le equazioni $f(x)=-15$ e $f(x)=-5$.

Risolviamo prima $f(x)=-15$ e cioè $x^3-16x+15=(x-1)(x^2+x-15)=0 \rightarrow x_1=1 \vee x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{61}}{2}$.

I punti sono, quindi, $A_1=(1,-15), B=\left(\frac{-1+\sqrt{61}}{2},-15\right), C=\left(\frac{-1-\sqrt{61}}{2},-15\right)$ di cui solo $A_1=(1,-15), B=\left(\frac{-1+\sqrt{61}}{2},-15\right)$ appartengolo al bordo della piscina.

Risolviamo ora $f(x) = -5$ e cioè $h(x) = x^3 - 16x + 5 = 0$; dal grafico della cubica ci rendiamo subito conto che le intersezioni con la retta du equazione *y*=-5 nell intervallo [0,4] sono 2.

Poichè $h(0) > 0, h(1) < 0$ la prima soluzione appartiene a (0,1) per il teorema degli zeri. Analogamente, poichè $h(3) < 0, h(4) > 0$ la seconda soluzione appartiene a (3,4) per il teorema degli zeri.

Calcoliamo la prima soluzione $0 < \overline{x_1} < 1$ mediante il metodi di bisezione:

$$x_1 = \frac{1}{2} \to h(x_1) = -\frac{23}{8} < 0 \Rightarrow 0 < \overline{x_1} < \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{4} \to h(x_2) = \frac{65}{64} > 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < \overline{x_1} < \frac{1}{2}$$
$$x_3 = \frac{3}{8} \to h(x_3) = -\frac{485}{512} < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < \overline{x_1} < \frac{3}{8}$$
$$x_4 = \frac{5}{16} \to h(x_4) = \frac{125}{4096} > 0 \Rightarrow \frac{5}{16} < \overline{x_1} < \frac{3}{8}$$

Poichè $\frac{5}{16} < \overline{x_1} < \frac{3}{8} \Leftrightarrow 0{,}3125 < \overline{x_1} < 0{,}375$ possiamo dire che a meno di un decimo la soluzione accettabile è $\overline{x_2} \cong 0{,}3$. Avremmo potuto proseguire col metodo di bisezione per trovare un'approssimazione ancora migliore.

Calcoliamo la seconda soluzione $\overline{x_2}$ ricorsivamente mediante la formula di Newton-Raphson $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 16x_n + 5}{3x_n^2 - 16} = \frac{2x_n^3 - 5}{3x_n^2 - 16}$ con punto iniziale $x_0 = 4$ in cui $h(\overline{x_2})$ e $h''(\overline{x_2})$ sono concordi. La tabella seguente mostra tutti i passi dell'algoritmo:

n	x_n	x_{n+1}	err=$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	4,000	3,844	
1	3,844	3,834	0,156
2	3,834	3,833	0,010

Con un errore inferiore al decimo si ha $\overline{x_2} \cong 3{,}83$ Notiamo che l'applicazione delmetodo delle tangenti ci conduce all'individuazione della radice con maggiore precisione in un numero minore di passi.

Il volume richiesto è pari a

4)

$$V=\int_0^4 (5-x)[g(x)-f(x)]dx=\int_0^4\left[(5-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]dx+\int_0^4[(x-5)(x^3-16x)]dx$$

$$=\left[\frac{2(x-5)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{x^5}{5}-\frac{5x^4}{4}-\frac{16x^3}{3}+40x^2\right]_0^4=$$

$$=\left(-\frac{2}{\pi}+\frac{1024}{5}-320-\frac{1024}{3}+640\right)-\left(-\frac{10}{\pi}\right)=\left(\frac{8}{\pi}+\frac{2752}{15}\right)m^3$$

I litri contenuti nella vasca sono $\left(\frac{8}{\pi}+\frac{2752}{15}\right)\cdot 1000=186013{,}15$ litri.