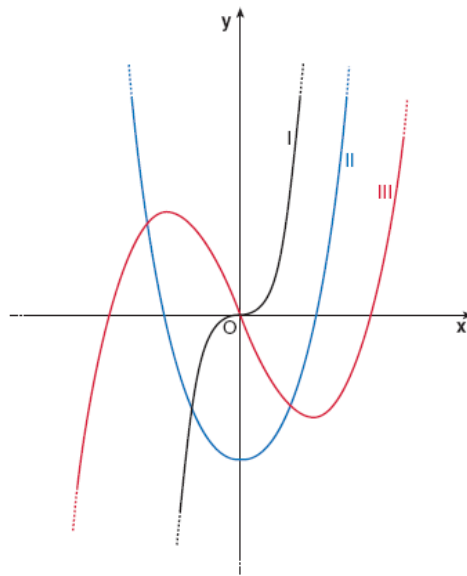


## QUESTIONARIO

1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perchè per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.
2. Si trovi il punto della curva  $y = \sqrt{x}$  più vicino al punto di coordinate  $(4; 0)$ .
3. Sia  $R$  la regione delimitata, per  $x \in [0, \pi]$ , dalla curva  $y = \sin x$  e dall'asse  $x$  e sia  $W$  il solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$ . Si calcoli il volume di  $W$ .
4. Il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi  $n$ .
5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «...se io dirò, i numeri tutti, comprendono i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?
6. Di tutti i coni iscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è citato così spesso?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici.



Uno di essi è il grafico di una funzione  $f$ , un altro lo è della funzione derivata  $f'$  e l'altro ancora di  $f''$ . Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	$f$	$f'$	$f''$
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

## Quesito 1

Silvia non ha ragione. La geometria non euclidea non è una geometria intrinsecamente più corretta di quella euclidea. Semplicemente la geometria euclidea fornisce uno strumento matematico adeguato per descrivere il mondo che ci circonda se ragioniamo in termini di piccole distanze, piccole rispetto alle dimensioni della Terra. Se invece siamo interessati a studiare, ad esempio, problemi di spostamento sulla superficie terrestre che coinvolgono distanze paragonabili alle dimensioni del pianeta, allora l'approssimazione euclidea non è adeguata, e occorre invece utilizzare modelli non euclidei, nella fattispecie una geometria di tipo ellittico.

## Quesito 2

Un punto  $P$  della curva ha coordinate  $(x, \sqrt{x})$  e la distanza dal punto  $(4,0)$  è  $d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$ . Massimizzare la funzione distanza è equivalente a massimizzare la funzione quadrato della distanza, per cui massimizzeremo la funzione  $h(x) = d^2 = x^2 - 7x + 16$ ; la derivata prima è  $h'(x) = 2x - 7$  per cui la funzione  $h(x)$  è strettamente crescente in  $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$  e strettamente decrescente in  $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$  per cui presenta un minimo all'ascissa  $x = \frac{7}{2}$ . Il punto più vicino è quindi  $\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$  e la distanza minima è

$$d_{\min} = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

## Quesito 3

Visto che è richiesto il volume di rotazione intorno all'asse delle ordinate, è conveniente esplicitare la funzione inversa della funzione seno. In particolare se  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  l'inversa è  $g(y) = \arcsin y$  mentre se  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  l'inversa è  $h(y) = \pi - \arcsin y$  con  $y \in [0,1]$  per cui il volume richiesto è pari alla differenza tra i volumi generati da  $h(y) = \pi - \arcsin y$  e  $g(y) = \arcsin y$  intorno all'asse  $y$ :

$$V = \pi \left[ \int_0^1 (\pi - \arcsin y)^2 dy - \int_0^1 \arcsin^2 y dy \right] = \pi \int_0^1 (\pi^2 - 2\pi \arcsin y) dy = \pi^3 - 2\pi^2 \int_0^1 \arcsin y dy$$

Applicando l'integrazione per parti si ha

$$\int_0^1 \arcsin y dy = [y \arcsin y]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = [y \arcsin y + \sqrt{1-y^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

per cui

$$V = \pi^3 - 2\pi^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2\pi^2$$

Quesito 4

Si deve risolvere l'equazione  $\binom{n}{4} = \binom{n}{3}$  con  $n \geq 4$ . Si ha:

$$\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \rightarrow n(n-1)(n-2)(n-7) = 0$$

da cui

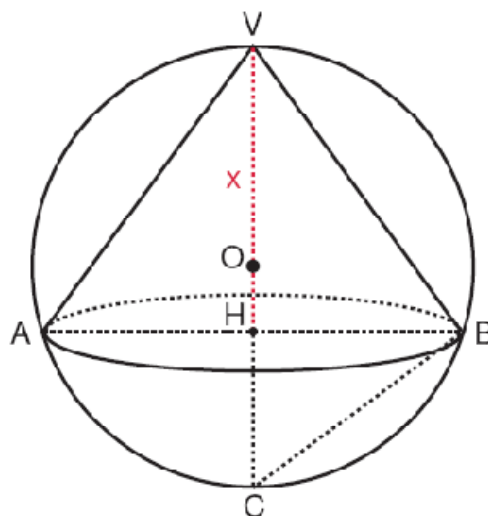
$n=0,1,2,7$ . Poichè per ipotesi deve essere  $n \geq 4$  la soluzione accettabile è  $n=7$ .

Quesito 5

Non è corretto quanto esposto da Salviati, el'inganno viene dal fatto che si sta ragionando su insiemi infiniti. Più precisamente se  $N$  è l'insieme dei numeri naturali e  $Q \subset N$  è l'insieme dei quadrati perfetti allora l'applicazione  $f: N \rightarrow Q$ ,  $f(n) = n^2$  è biiettiva. Ne segue che i due insiemi  $N$  e  $Q$  hanno la stessa cardinalità o, in altre parole, lo stesso numero di elementi.

Quesito 6

Consideriamo la figura sottostante:



Sia  $\overline{VH} = x$  con  $0 < x < 20$ . Per il teorema di Euclide  $\overline{VB} = \sqrt{\overline{VH} \cdot \overline{VC}} = \sqrt{20x}$  e per il teorema di Pitagora  $\overline{HB} = \sqrt{\overline{VB}^2 - \overline{VH}^2} = \sqrt{20x - x^2}$ ; la superficie laterale del cono è  $S_l(x) = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB} = \sqrt{20}\pi \cdot \sqrt{20x^2 - x^3}$  con  $0 < x < 20$ . La massimizzazione di  $S_l(x)$  equivale alla massimizzazione di  $h(x) = \sqrt{20x^2 - x^3}$  il che equivale alla massimizzazione del quadrato della funzione ausiliaria  $h(x) = \sqrt{20x^2 - x^3}$ ; va quindi massimizzata la funzione  $g(x) = h^2(x) = 20x^2 - x^3$  la cui derivata prima è  $g'(x) = 40x - 3x^2$  e il cui segno è il seguente:

$$g'(x) = 40x - 3x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{40}{3}$$

$$g'(x) = 40x - 3x^2 < 0 \Rightarrow \frac{40}{3} < x < 20$$

Dal segno soprastante deduciamo che la superficie laterale è massima quando l'altezza VH misura

$$x_{\max} = \frac{40}{3} \text{ cui corrisponde } S_l(x_{\max}) = \sqrt{20}\pi \cdot \sqrt{20\left(\frac{40}{3}\right)^2 - \left(\frac{40}{3}\right)^3} = \frac{800\sqrt{3}}{9}\pi \cong 483,68\text{cm}^3$$

Quesito 7

La probabilità può essere calcolata come  $p = 1 - \Pr(0 \text{ risposte esatte}) - \Pr(1 \text{ risposta esatta})$ . Per ogni domanda la probabilità che una risposta su quattro sia esatta è  $\frac{1}{4}$  e che sia sbagliata è  $\frac{3}{4}$  per

cui  $\Pr(0 \text{ risposte esatte}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ ; la probabilità invece che una sola risposta sia esatta è data dalla

probabilità che solo una domanda su dieci sia esatta e cioè  $\Pr(1 \text{ risposta esatta}) = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$  per

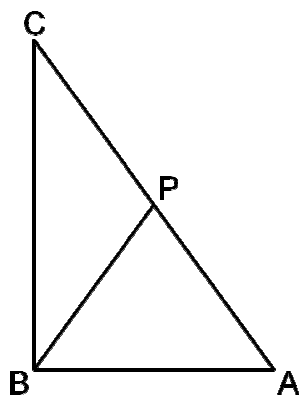
cui la probabilità richiesta è  $p = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cong 0,75597$ .

Quesito 8

La quadratura del cerchio, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, costituisce un problema classico della geometria greca. In sostanza quello della quadratura del cerchio non è altro che un classico problema di matematica (più precisamente di geometria) il cui scopo è costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo di riga e compasso.

## Quesito 9

Consideriamo la figura sottostante



Consideriamo il piano su cui giace il triangolo; P è il punto medio dell'ipotenusa essendo BP la mediana e P coincide con il circocentro e in quanto tale è equidistante dai tre vertici. Consideriamo la perpendicolare per P e prendiamo un punto H. I triangolo APH, BPH e CPH sono rettangoli in P per cui applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$\overline{HC}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PC}^2$$

$$\overline{HA}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PA}^2$$

$$\overline{HB}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PB}^2$$

Poichè P è equidistante dai tre vertici si ha  $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$  da cui deduciamo, viste le 3 formule di cui sopra,  $\overline{HA} = \overline{HB} = \overline{HC}$  e poichè H è arbitrario la proprietà si può ritenere valida.

## Quesito 10

Risposta esatta D.

Infatti se assumiamo come f la funzione III ci rendiamo conto che la derivata prima si annulla in due punti in corrispondenza del massimo e del minimo relativo che assume f. Inoltre deve avvenire che la derivata prima deve essere positiva tra meno infinito e il massimo di f, negativa tra massimo e minimo, e poi di nuovo positiva dal minimo in poi. E ciò è quello che succede nella funzione II. Inoltre la derivata seconda deve azzerarsi solo in zero che è flesso per f, passando da valori negativi a valori positivi, cosa che accade per la funzione I. Alternativamente possiamo notare come delle tre funzioni, due sono dispari e cioè I e III e una è pari, la II. Visto che la derivata di una funzione dispari è pari e viceversa, la funzione derivata prima non può essere che la II. In questo modo le alternativi possibili restano la A e la D. Ma la A va scartata in quanto la funzione II assume sia

valori positivi che negativi e quindi non può essere la derivata della I, perchè derivando la I si ottiene una funzione sempre positiva. Pertanto l'alternativa corretta è la D.